643. 円，球ノ幾何ニツイテ

松村　宗治（台北大）

（I）　R_3 内ニ円 $\mathcal{K}$, $\overline{\mathcal{K}}$ ガアリ $\mathcal{K}$ ヲ通ル球 $\mathfrak{S}^{\alpha}$ ガ $\overline{\mathcal{K}}$ トナス角ヲ φ トセバ

$$(1)\quad \cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\varrho_\alpha\varrho_\beta$$

ナルコトヲ前ニ自分ハコヽデモ述ベタ、コヽニ

$$(2)\quad A^{\alpha\beta}\varrho_\alpha\varrho_\beta = 1$$

デアル、サテ φ ガ φ_0 ナル與値ヲトレバ $\cos^2\varphi_0 = K^2$ トオキ

$$(3)\quad (T^{\alpha\beta} - K^2A^{\alpha\beta})\varrho_\alpha\varrho_\beta = 0$$

デアル。(3) ヨリ $\varrho_1 : \varrho_2$ ノ値ガ二ツ求マル、ソレヲ

$$\alpha : \beta;\quad \bar{\alpha} : \bar{\beta}$$

トシ

$$(4)\quad D = \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$$

トオケバ此 D ヲバ $T^{\alpha\beta}$, K, $A^{\alpha\beta}$ デ表ハシ得ベクソノ D ヨリ

$$(5)\quad \frac{1}{2}\log D$$

ヲツクリテ之レヲ $\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}$ ノ *Entfernung* ト稱シソレヲ $l(\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{II}})$ デ表ス。

ツマリ

$$(6)\quad l(\mathfrak{y}^{\mathrm{I}}, \mathfrak{y}^{\mathrm{II}}) = \frac{1}{2}\log\frac{\{T^{12} - K^2A^{12}\}^2}{\{T^{11} - K^2A^{11}\}\{T^{22} - K^2A^{22}\}}$$

デアル。

サテ α, β ヲすからートシテ三ツノ球 $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{w}$ ニ對シテ

$$(7)\quad \mathfrak{w} = \alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z}$$

ナラバ

$$(8)\quad l(y,z)+l(z,w)+l(w,y)=0$$

ガ成立ツ。

ツマリ線分ノ additive Eigenschaft ガ成立スルノデアル。

(II) 今 Kreisfläche 上ニ (τ), (t) 曲線ヲ考ヘ尚別ニ

$$(1)\quad \frac{d\tau}{dt}=\alpha$$

ナル曲線ヲ考ヘル. コノ最後ノ曲線ヲCト名ヅケル、今(τ), (t) 曲線ノ間ノ角ヲ ω トシ φ ヲバ (τ) 曲線ト C トノナス角トセバ

$$(2)\quad \frac{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}\,d\tau}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}\,dt}=\frac{\sqrt{(\theta_\tau\theta_\tau)}}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)}}\alpha=\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)}=\frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)}}{H\cot\varphi-(\theta_t\theta_\tau)}$$

デアル、コヽニ

$$(3)\quad H=\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}$$

デアル。

ソコデ

$$(4)\quad \tan\varphi=\frac{H\alpha}{(\theta_t\theta_t)+(\theta_t\theta_\tau)\alpha}$$

ガ成リ立ツ、ソコデ φ_1, φ_2 ナル二ツノ値ヲ φ ガトリシ時ノ C ノ値ヲ C_1, C_2 トシ、ソレニ對應スル α ノ値ヲ α_1, α_2 トセバ

$$(5)\quad \varphi_1-\varphi_2=\tan^{-1}\left\{\frac{H(\alpha_1-\alpha_2)}{(\theta_t\theta_t)+(\theta_t\theta_\tau)(\alpha_1+\alpha_2)+(\theta_\tau\theta_\tau)\alpha_1\alpha_2}\right\}$$

デアル。

尚 $\alpha = -\dfrac{(\theta_t\theta_t)}{(\theta_t\theta_\tau)}$ ナル場合ニハ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ トナリCハ次ノ様ニナル。

$$(6)\quad \frac{d\tau}{dt} = -\frac{(\theta_t\theta_t)}{(\theta_t\theta_\tau)}$$

以上拙著台北大學理農學部紀要第二巻第一号ト Ann. of Math. 23, p. 53 ニ於ケル Whittemore ノ論文トヲ比較セベヨイ。

(III) Asymptotic lines on the first sheet of the centro-surface ハ下ノ様ニナル。

$$(\theta_t\theta_t)\alpha_1\beta^2 dt^2 - (\theta_\tau\theta_\tau)\beta_1\alpha^2 d\tau^2 = 0$$

但シ此ノ時原表面ハ円系表面ノ場合デアル、同様ニ Second sheet ニ對スル Asymptotic lines ノ式ハ

$$(\theta_t\theta_t)\alpha_2\beta^2 dt^2 - (\theta_\tau\theta_\tau)\beta_2\alpha^2 d\tau^2 = 0$$

デアル。

尚、亦円系表面ガアツテ其ノ centro-surface ノ first sheet ノ上ノ lines of curvature ノ式ハ下ノ様デアル。

$$\begin{aligned}(\theta_t\theta_t)\beta^2\alpha_1\alpha_2\, dt^2 &+ (\theta_\tau\theta_\tau)\alpha^2\alpha_2\beta_1\, d\tau^2 \\ &+ \{(\theta_t\theta_t)\beta^2\alpha_2^2 + (\theta_\tau\theta_\tau)\alpha^2\alpha_1\beta_1 \\ &+ (\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)(\alpha-\beta)^2\, dt\, d\tau = 0\end{aligned}$$

デアル、Second sheet ノ上ノモノモ同様ニ求ル。$\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ニツイテハ Weatherburn: Diff. Geo. I,

p. 156, p. 154 ヲ見ラルベシ。

(IV) 円系表面上ニ測地曲線

(1) $\mu(t, \tau) = \text{const.}$

ガ與ヘラレソレニ垂直ナル方向 $(d\tau : dt)$ ニ向ツテハ

$$(2) \quad \{(\theta_t\theta_t)\mu_\tau - (\theta_t\theta_\tau)\mu_t\} dt + \{(\theta_t\theta_\tau)\mu_\tau - (\theta_\tau\theta_\tau)\mu_t\} dt = 0$$

ガ成立ツ、Scheffers: Theorie der Flächen (1922), S. 499 ヲ參考シタ。

(2) ニ於ケル $(d\tau : dt)$ ガ

$$(3) \quad (\theta_t\theta_t)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\left(\frac{dt}{d\tau}\right) + (\theta_\tau\theta_\tau) = 0$$

ヲ滿足セバ

$$(4) \quad (\theta_t\theta_t)\left\{\frac{(\theta_t\theta_\tau)\mu_\tau - (\theta_\tau\theta_\tau)\mu_t}{(\theta_t\theta_\tau)\mu_t - (\theta_t\theta_t)\mu_\tau}\right]^2 + 2(\theta_t\theta_\tau)\left\{\frac{(\theta_t\theta_\tau)\mu_\tau - (\theta_\tau\theta_\tau)\mu_t}{(\theta_t\theta_\tau)\mu_t - (\theta_t\theta_t)\mu_\tau}\right\} + (\theta_\tau\theta_\tau) = 0$$

デアル、(4) ハ (1) ニ orthogonalen Trajektorien ガ極小曲線ナル條件デアル。